Существование решения обобщенной задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом

Илья Дикарев (BTU C-S, dikarill@tu-cottbus.de)

21 апреля 2017 г.

Мотивирующий пример

$$J(x,u) = \int_0^{\infty} \left[(1 - u^2(t)) + x^2(t)\right] e^{-t} \mathrm{d}t \longrightarrow Min!$$

$$\dot{x}(t) = u(t) \text{ п.в.}, \ x(0) = 0,$$

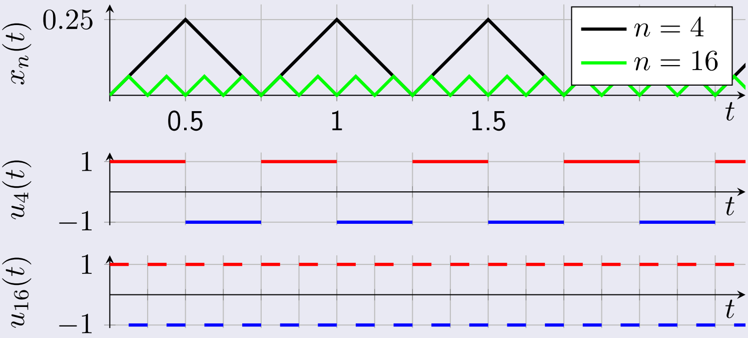
$$x \in \boxed{W_2^1(\mathbb{R}^+, \nu)}, \ \nu(t) = e^{-st}, \ s > 0,$$

$$u(t) \in [-1, 1] \text{ п.в.},$$

$$u \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$$

- Существует минимизирующая последовательность (x_n, u_n) и $J(x_n, u_n) \to 0$.
- $\exists \tau \in \mathbb{R}_0^+ : \ x^*(\tau) \neq 0 \Rightarrow J(x^*, u^*) > 0$,
- $x^* \equiv 0$ не оптимальна:
  $u^*(t) = \dot{x}^*(t) = 0$ п.в. $\Rightarrow J(x^*, u^*) = 1$.
- Оптимального решения не существует.

Траектория x_n соответствующая u_n при $n = 4$ и $n = 16$



$$J(x_4, u_4) < \frac{1}{16}, \quad J(x_{16}, u_{16}) < \frac{1}{256}, \quad J(x_n, u_n) < \frac{1}{n^2}$$

Определение: обобщенное управление

Пусть ζ – некоторая мера на $\mathbb{R}_0^+$. Семейство $\mu := \{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ называется **обобщенным управлением** если:

1. μ_t – вероятностное распределение ζ-п.в.,
2. $\operatorname{supp}\mu_t \subseteq U \in Comp(\mathbb{R}^m)$ ζ-п.в.,
3. $\forall g \in C_0(\mathbb{R}_0^+ \times U)$ функция $h(t) = \int_U g(t,v)\mathrm{d}\mu_t$ ζ-измерима.

Множество классов эквивалентности по соотношению

$$\mu^1 \sim \mu^2 \quad \hat{=} \quad \forall g \in C_c(U) : \int_U g(v)\mathrm{d}\mu_t^1 = \int_U g(v)\mathrm{d}\mu_t^2 \ \zeta\text{-п.в.}$$

обозначим как $\mathcal{M}_U^\infty$.

Определение

$$\mathcal{M}_U^\zeta := \left\{\pi \in C_0(\mathbb{R}_0^+ \times U)^* \,\middle|\, \exists\mu \in \mathcal{M}_U^\infty : \ \pi = \mu \otimes \zeta\right\}$$

Для любой $g \in C_c(U)$ примем следующее: $\langle \mu_t, g \rangle := \int_U g(v) \mathrm{d}\mu_t$

Релаксация

$$J(x,\mu) = \int_0^\infty \left\langle \mu_t, (1-v^2) + x^2(t) \right\rangle e^{-t} \mathrm{d}t \longrightarrow Min!$$

$$\dot{x}(t) = \langle \mu_t, v \rangle \text{ п.в.}, \ x(0) = 0,$$

$$x \in W_2^1(\mathbb{R}^+, \nu), \ \nu(t) = e^{-st}, \ s > 0,$$

$$\mu \in \mathcal{M}_U^\infty, U = [-1,1].$$

оптимальное решение

- $\mu^* = \{\mu_t^*\} := \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, δ_a – мера Дирака,

$\rightsquigarrow$ $\dot{x}^*(t) = \left\langle \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1, v \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$ п.в.

$\rightsquigarrow$ $\left\langle \mu_t^*, 1 - v^2 \right\rangle = 0$, $x^*(t) = 0$ п.в. $\Rightarrow$ $J(x^*, \mu^*) = 0$

Лемма: „$\mu \leftrightarrow \pi$"

Пусть ζ ограниченная мера Радона на $\mathbb{R}_0^+$, тогда отображение $\mu : \mathcal{M}_U^\infty \to \mathcal{M}_U^\zeta,\ \mu \mapsto \mu \otimes \zeta$ биективно и $\mathcal{M}_U^\infty \simeq \mathcal{M}_U^\zeta$.

Обобщенная формулировка задачи оптимального управления

$$J(x, \pi = \mu \otimes \zeta) = \int_0^\infty \langle \mu_t, r(t, x(t), v) \rangle \, \mathrm{d}\zeta \to Min!$$

$$Z : \begin{cases} \dot{x}(t) = \langle \mu_t, f(t, x(t), v) \rangle \ \text{п.в.}, \\ x(0) = x_0,\ x \in W_2^1(\mathbb{R}^+, \nu), \\ \pi \in \mathcal{M}_U^\zeta,\ U \in Comp(\mathbb{R}^m). \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

1. $\|f(t,\xi,v)\| \le C(1+\|\xi\|) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\ \forall v \in U \subset \mathbb{R}^m$,
2. $|r(t,\xi,v)| \le \|\xi\|^p q(t) + A(t)$, причем

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & q(t)e^{Cpt}t^p =: h(t),\ h \in C_0, \\ \text{b)} & A \in C_0(\mathbb{R}_0^+), \end{array}\right\} \rightsquigarrow \boxed{r \circ x =: \tilde{r} \in C_0(\mathbb{R}_0^+ \times U)}$$

3. $\nu(t) = e^{-st},\ s > 2C,\ \zeta(t)$ – плотность $\rightsquigarrow$ $\boxed{X\text{– ограничено}}$
4. $\exists (x^0, \pi^0) \in Z :\ J(x^0,\pi^0) < \infty$.

Существует оптимальное решение

$$J(x,\pi) = \int_0^\infty \langle \mu_t, r(t,x(t),v)\rangle\, \mathrm{d}\zeta \to Min!$$

$$Z : \begin{cases} \dot{x}(t) = \langle \mu_t, f(t,x(t),v)\rangle \ \text{п.в.}, \\ x(0) = x_0,\ x \in W_2^1(\mathbb{R}^+,\nu), \\ \pi \in \mathcal{M}_U^\zeta,\ U \in Comp(\mathbb{R}^m). \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

Траектории в пространстве $W_2^1(\mathbb{R}^+, \nu)$

- Взвешенное пространство $W_2^1(\mathbb{R}^+, \nu)$ гильбертово $\rightsquigarrow$ ограниченные множества секвенциально компактны,
- выбор плотности $\nu \rightsquigarrow$ равномерная ограниченность допустимых траекторий.

Литература

Задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом во взвешенных пространствах Соболева: Sabine Pickenhain, Valeriya Lykina, Markus Wagner:

- `https://www.math.tu-cottbus.de/INSTITUT/lsopt/publication/opt_lit.htm`

Свойства множества $\mathcal{M}_U^\zeta$

$$\boxed{\mathcal{M}_U^\zeta := \left\{\pi \in C_0(\mathbb{R}_0^+ \times U)^* \,\middle|\, \exists \mu \in \mathcal{M}_U^\infty : \ \pi = \mu \otimes \zeta\right\}}$$

- $\mathcal{M}_U^\zeta \subset C_0(\mathbb{R}_0^+ \times U)^*$,
- $\pi \in \mathcal{M}_U^\zeta \ \Rightarrow \ \|\pi\| = \zeta(\mathbb{R}_0^+) = C < \infty$,
- $\mathcal{M}_U^\zeta$ замкнуто в широкой топологии (следствие из [3, Гл.IX,§2(7)])

$$\mu^i \otimes \zeta \xrightarrow{*} \pi \ \Rightarrow \ \pi = \mu \otimes \zeta.$$

- $\mathcal{M}_U^\zeta$ компактно в широкой топологии (Банах-Алаоглу).

$$Z : \begin{cases} \dot{x}(t) = \langle \mu_t, f(t, x(t), v) \rangle \text{ п.в.}, \\ x(0) = x_0, x \in W_2^1(\mathbb{R}^+, \nu), \\ \pi \in \mathcal{M}_U^\zeta, U \in Comp(\mathbb{R}^m). \end{cases} \qquad \boxed{\pi = \mu \otimes \zeta}$$

Выбор топологии

Топологию $\mathcal{T}$ на Z индуцируем слабой топологией на $W_2^1(\mathbb{R}^+, \nu) \times \mathcal{M}_U^\zeta$ и широкой топологией на $\mathcal{M}_U^\zeta \subset C_0(\mathbb{R}_0^+ \times U)^*$.

Лемма

- $\mathrm{d}\zeta = \zeta(t)\mathrm{d}t$, $\zeta(t)$ – плотность: $\boxed{\text{например } \zeta(t) = e^{-st}}$
- некоторые ограничения на $f(t, \xi, v)$,

$\Rightarrow$ Z замкнуто и ограничено $\rightsquigarrow$ компактно в топологии $\mathcal{T}$.

Лемма (Л)

- $r(t,\xi,v)$ непрерывна, $\zeta(\mathbb{R}_0^+) < \infty$, $X \subseteq W_2^1(\mathbb{R}^+,\nu)$,
- $\boxed{0 \le r(t,x(t),v) \le \beta(t,v) \in C_0(\mathbb{R}_0^+ \times U) \quad \forall x \in X,}$

$\Rightarrow$ $J(x,\pi)$ полунепрерывна снизу на $X \times \mathcal{M}_U^\zeta$ в топологии $\mathcal{T}$.

Теорема о существовании решения

- $\|f(t,\xi,v)\| \le C(1+\|\xi\|)$,
- $\zeta(t)$ – плотность,
- r и ζ удовлетворяют условиям леммы (Л),
- множество допустимых решений не пусто,

$\Rightarrow$ (P) имеет оптимальное решение.

Literatur I

- R.A. Adams and J.J.F. Fournier: *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.
- Н. Бурбаки: *Интегрирование – меры, интегрирование мер*. “Наука”, 1967.
- Н. Бурбаки: *Интегрирование – меры на локально компактных пространствах, продолжение меры, интегрирование мер, меры на отделимых пространствах*. “Наука”, 1977.
- I. Dikariev: *Ein Beitrag zur Existenz optimaler Lösungen bei Steuerungsproblemen mit unendlichem Zeithorizont*, 2016. https://www.math.tu-cottbus.de/INSTITUT/lsopt/publication/preprint/pickenh/Skript_19-11-2016.pdf.

Literatur II

- J. Elstrodt: *Maß – und Integrationstheorie.*
  Springer, 2011.
- R.V. Gamkrelidze: *Principles of Optimal Control Theory.*
  Plenum Press, New York and London, 1978.
- V. Lykina: *Beitäge zur Theorie der Optimalsteuerungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont.*
  Dissertation, Brandenburgische Technische Universitaet Cottbus, 2010.
- B.G. Pachpatte: *Inequalities for Differential and Integral Equations.*
  Academic Press Limited, 1998.